学校：________ 班级：________ 姓名：________ 准考证号：________

装 订 线

绝密★启用前

2024届高三4月大联考（全国乙卷）

理科数学

本卷满分150分，考试时间120分钟。

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．$\frac{3+4\mathrm{i}}{1-3\mathrm{i}^3}=$

A．$\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　B．$-\frac{9}{10}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　C．$-\frac{9}{10}+\frac{13}{10}\mathrm{i}$　　D．$\frac{3}{2}+\frac{13}{10}\mathrm{i}$

2．已知命题 p：$\forall n\in\{2,3,4,5,6\}$，$\sqrt[n]{n}\ne\sqrt[2n]{2n}$，则$\neg p$为

A．$\forall n\notin\{2,3,4,5,6\}$，$\sqrt[n]{n}\ne\sqrt[2n]{2n}$　　B．$\forall n\notin\{2,3,4,5,6\}$，$\sqrt[n]{n}=\sqrt[2n]{2n}$

C．$\exists n\in\{2,3,4,5,6\}$，$\sqrt[n]{n}\ne\sqrt[2n]{2n}$　　D．$\exists n\in\{2,3,4,5,6\}$，$\sqrt[n]{n}=\sqrt[2n]{2n}$

3．已知集合$A=\{(x,y)\,|\,|2y-1|=x\}$，$B=\{(x,y)\,|\,y=\frac{1}{3}x\}$，则$A\cap B$中的元素个数为

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

4．已知实数x,y满足约束条件$\begin{cases}x-y+6\ge 0\\3x-y+6\le 0\\x-2y+6\le 0\end{cases}$，若$z=x-\frac{y}{3}$，则$z$的取值范围是

A．$(-\infty,-2]$　　B．$[-6,-2]$　　C．$[2,6]$　　D．$[-6,2]$

5．若数据x_1,x_2,x_3,x_4的平均数为$\bar{x}$，方差为s^2，则数据$x_1,x_2,x_3,x_4,\bar{x}$的方差为

A．s^2　　B．$\frac{s^2}{5}$　　C．$\frac{4}{5}s^2$　　D．$\frac{4s^2+\bar{x}^2}{5}$

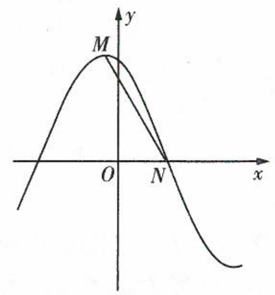
6．已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$\frac{a_7}{a_8}=-1$，则$S_{10}=$

A．S_4　　B．S_5　　C．S_6　　D．S_7

7．已知四边形$ABCD$是菱形且$|\overrightarrow{AC}|=3$，若$\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，则$(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{BD})\cdot\overrightarrow{EC}=$

A．$\frac{1}{2}$　　B．1　　C．$-\frac{1}{2}$　　D．-1

8．已知函数$f(x)=4\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2})$的部分图象如图所示，图象的一个最高点为$M$，图象与$x$轴的一个交点为$N(\frac{9}{4},0)$，且点$M,N$之间的距离为5，则$f(\frac{5}{4})=$

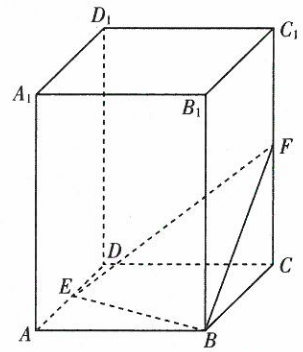


A．$\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　B．$2\sqrt{3}$　　C．$\frac{3}{2}$　　D．2

9．已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且对于任意的$n\in\mathbf{N}^*$，都有$S_n=1-a_n$，数列$\{b_n\}$满足$b_n=\frac{a_n}{S_n^2}$．若$b_n<M$恒成立，则正整数M的最小值为

A．1　　B．3　　C．5　　D．7

10．如图，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，底面$ABCD$是边长为4的正方形，$AA_1=8$，点E,F分别为AD,CC_1的中点，若点G在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的表面上，且直线D_1G // 平面BEF，则点G轨迹的长度为



A．$4\sqrt{2}+6\sqrt{5}$　　B．$4+4\sqrt{5}$　　C．$6\sqrt{2}+4\sqrt{5}$　　D．$3\sqrt{2}+2\sqrt{5}$

11．过双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点$F$向双曲线$C$的一条渐近线作垂线，垂足为$D$，线段$FD$与双曲线$C$交于点$E$，过点$E$向另一条渐近线作垂线，垂足为$G$，若$\frac{|DE||EG|}{|DF|^2}=\frac{1}{3}$，则双曲线$C$的离心率为

A．$\sqrt{3}$　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　D．$\frac{2\sqrt{5}}{3}$

12．若$a=\frac{7}{24},b=\sin\frac{1}{4},c=\ln\frac{4}{3}$，则

A．$b<a<c$　　B．$c<b<a$　　C．$b<c<a$　　D．$a<b<c$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．已知圆锥的底面周长为8π，其侧面积与半径为$\sqrt{5}$的球的表面积相等，则该圆锥的体积为________．

14. 已知函数 $f(x)=\dfrac{\log_2(8^x+1)}{x}+a(2+\dfrac{1}{x})$ 是奇函数，则 $a=$__________.

15. 随着人工智能和机器学习等关键技术的不断进步,中国 AI 数字人相关企业持续进行技术创新,数字人产品相关技术能力不断提升,近年来行业专利数量逐年增加,2015-2022 年中国 AI 数字人相关专利申请数量（单位：项）依次为：1111，1390，1850，2578，3790，4984，6090，6377，从这 8 个数中任取 3 个,则这 3 个数中任意两个数的差的绝对值都大于 1000 的取法种数为__________.（用数字作答）

16. 已知抛物线 C：$x^2=-2y$ 的焦点为 F，直线 l 与抛物线 C 交于 A，B 两点，分别过 A，B 两点作抛物线 C 的切线交于点 P .若 $|AF|\cdot|BF|=8$，则 $|PF|=$__________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（12 分）

在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，$\dfrac{c}{a+b}=\dfrac{\sin B-\sin A}{\sin C-\sin A}$.

（1）求 B；

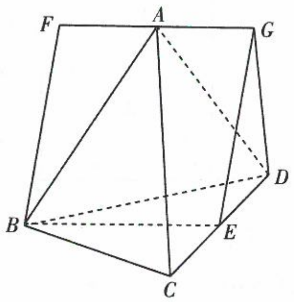
（2）若 $a=2$，$b=c\cos A$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

18.（12 分）

如图，三棱锥 $A-BCD$ 的所有棱长都是 $4\sqrt{3}$，E 为 CD 的中点，$FG /\!/ BE$ 且 A 为 FG 的中点.

（1）求证：平面 $ACD\perp$ 平面 ABF；

（2）若 $FG<2AB$，平面 ABC 与平面 DEG 所成锐二面角的余弦值为 $\dfrac{5}{9}$，求 FG 的长.



19.（12 分）

某羽毛球比赛的单打记分规则：比赛采用三局两胜制，每赢一球得 1 分，一局比赛中先得 21 分的一方获胜，如果比分为 20 平，那么必须继续比赛，直到有一方领先 2 分，领先的一方获胜；如果比分为 29 平，那么先得 30 分的一方获胜，一局比赛结束，每局获胜方将获得下一局的发球权.

假设甲、乙两位选手相逢决赛.第一局甲、乙每球得分的概率均为 0.5（每球的得分情况相互独立）.

（1）第一局双方已打到 27 平，问在此情况下：

（i）两人最多再打几个球该局比赛结束，并求其发生的概率；

（ii）第一局结束时甲累计得分为 X，求 X 的分布列；

（2）第二、三局获得发球权的一方，在本局获胜的概率为 0.6，每局比赛结果相互独立，求甲获得第二局的发球权，但输掉比赛的概率.

20.（12 分）

已知点 $P(\dfrac{2}{3},\dfrac{2\sqrt{6}}{3})$ 在椭圆 C:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上，F_1,F_2 分别是椭圆 C 的左、右焦点，且 $\tan\angle PF_1F_2=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$.

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）过点 $Q(4,0)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于 A,B 两点，点 A 关于 x 轴的对称点为 E，则在 x 轴上是否存在点 T，使得 $\overrightarrow{TB}\cdot\overrightarrow{TE}$ 为定值.若存在，求出点 T 的坐标；若不存在，请说明理由.

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=(x^2-2x+2-a)e^x-\dfrac{1}{2}x^4+ax^2-\dfrac{1}{2}a^2$，$a\in\mathbf{R}$.

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）若函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有最小值 $\varphi(a)$,判断方程 $\varphi(a)=-2ea\ln a$ 的实根个数.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xOy 中,曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=2(1+\cos\varphi)\\ y=2\sin\varphi\end{cases}$（$\varphi$ 为参数），以坐标原点 O 为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系,曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=4\sin\theta$.

（1）求曲线 C_1 的极坐标方程；

（2）若射线 $\theta=\alpha$ $(\rho\ge 0,\dfrac{\pi}{8}<\alpha<\dfrac{\pi}{4})$ 与曲线 C_1，C_2 分别交于点 A_1,A_2 ,射线 $\theta=2\alpha$ 与曲线 C_1 ,C_2 分别交于点 B_1,B_2 （A_1,A_2 ,B_1,B_2 均不与 O 重合），试用 α 表示四边形 $A_1A_2B_1B_2$ 的面积 S ,并求 S 的取值范围.

23. [选修 4-5：不等式选讲]（10 分）

已知函数 $f(x)=|x-1|+2x+a$.

（1）当 $a=2$ 时，求不等式 $f(x)\ge 0$ 的解集；

（2）若存在 $x\in[-\dfrac{1}{3},2]$，使得不等式 $f(x)-2|x|<0$ 成立，求实数 a 的取值范围.

装 订 线
考生注意清点试卷有无漏印或缺页，若有要及时更换，否则责任自负